В монографии две существенных ошибки.

1. Теорема Янова-Мучника

Теорема Янова-Мучника (с. 45, Замечание) верна: существуют алгебры без базиса и с бесконечным базисом, множество подадгебр в алгебре с бесконечным базисом континуально. Но доказательство этой теоремы содержало небольшие ошибки и было бы отвергнуто любой компьютерной программой.

В монографии утверждение о счётности подалгебр в алгебре с бесконечным базисом (с. 8 строка 2, с.44 вторая теорема) ошибочно.

2. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Изложение дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм (ДНФ и КНФ) содержит ошибки и неточности. Далее даётся более точное изложение ДНФ. Изложение КНФ аналогично.

Определения. В дальнейшем дизъюнкцией называются символ $\vee$, формула $p_1 \vee p_2$ и функция $x_1 \vee x_2$. Аналогично называются конъюнкции. Из текста всегда ясно, что именно используется. В конъюнкциях $p_1 \wedge p_2$ сокращается до $p_1 p_2$.

Формула $p_1 \vee ... \vee p_n$ называется элементарной. Конъюнкция $p_1 p_2$ получается из элементарной формулы p_0 заменой $p_0 = p_1 p_2$.

Число переменных в формулах и в функциях обозначается n.

Определение. Логическая форма есть логическая формула, содержащая только символы отрицания, дизъюнкции и конъюнкции. **Литерал** есть логическая переменная без отрицания или с отрицанием. **Нормальная форма** есть логическая форма, содержащая отрицания только в литералах. **Дизъюнкт** есть нормальная форма, не содержащая конъюнкций. **Конъюнкт** есть нормальная форма, не содержащая дизъюнкций. Равные литералы и литералы, отличающиеся только знаками, запрещены в дизъюнктах и конъюнктах. **ДНФ** есть нормальная форма, являющаяся дизъюнкцией конъюнктов. Равные конъюнкты запрещены в ДНФ.

Для построения ДНФ будут использоваться следующие тождества поглощения:

$$p_0 p_1 \vee p_1 = p_1 \tag{1}$$

$$p_0 p_1 \vee \overline{p}_0 p_1 = p_1 \tag{2}$$

$$p_0 p_1 \vee \overline{p}_0 p_2 \vee p_1 p_2 = p_0 p_1 \vee \overline{p}_0 p_2 \tag{3}$$

Тождества (1) и (2) очевидны. Тожество (3) проверяется численно. Если $p_1 = 0$ или $p_2 = 0$, то левая часть (3) равна правой части (3). Если $p_1 = p_2 = 1$, то обе части равны 1.

В этих тождествах переменные p_i могут быть заменены формулами. Если в некоторой формуле встречается левая часть из (1), (2) или (3), то эта левая часть заменяется на правую часть. Другими словами, справедливы элементарные формулы:

$$p_0 p_1 \vee p_1 \vee p = p_1 \vee p$$

$$p_0 p_1 \vee \overline{p}_0 p_1 \vee p = p_1 \vee p$$

$$p_0 p_1 \vee \overline{p}_0 p_2 \vee p_1 p_2 \vee p = p_0 p_1 \vee \overline{p}_0 p_2 \vee p$$

где p есть переменная, заменяющая остальную часть формул.

Тождества (1) и (2) удаляют в конъюнктах лишние переменные p_0. При этом пара конъюнктов заменяется одним конъюнктом. Тождество (3) удаляет конъюнкт p_1p_2.

Лемма. *Только тождества (1) и (2) удаляют лишние переменные.*

Доказательство. Пусть только один конъюнкт содержит лишнюю переменную p_0. Элементарная формула (точнее, элементарная нормальная форма) с таким конъюнктом есть $p_0p_1 \vee p_2$, $p_12 \neq 0$. Но $p_0p_1 \vee p_2 = p_1 \vee p_2$ только если $p_1 = p_2$, так как при $p_0 = 0$ имеем $p_2 = p_1 \vee p_2$, что возможно если $p_1 = p_2$.

Пусть два конъюнкта содержат лишние переменные p_{01} и p_{02}. Тогда элементарная формула есть $p_1 \vee p_2p_{01} \vee p_3p_{02}$. Так как переменные p_{01} и p_{02} лишние , то

$$p_1 \vee p_2p_{01} \vee p_3p_{02} = p_1 \vee p_2 \vee p_3 \tag{4}$$

Если $p_{01} = p_{02} = 0$, то из (4) получим $p_1 = p_1 \vee p_2 \vee p_3$, т.е $p_2 \vee p_3 = p_1$. Если $p_{01} = 1 \wedge p_{02} = 0$, то $p_1 \vee p_2 = p_1 \vee p_2 \vee p_3$, т.е. $p_3 = p_1 \vee p_2$. Если $p_{01} = 0 \wedge p_{02} = 1$, то $p_1 \vee p_3 = p_1 \vee p_2 \vee p_3$, т.е. $p_2 = p_1 \vee p_3$. Но полученные формулы

$$p_2 \vee p_3 = p_1 \quad p_3 = p_1 \vee p_2 \quad p_2 = p_1 \vee p_3$$

несовместимы. Действительно, подстановка второй формулы в третью даёт $p_1 = p_2$. Подстановка $p_1 = p_2$ в первую формулу даёт $p_1 = p_2 = p_3$. Тогда элементарная формула превращается в формулу с одним конъюнктом p_1. Это противоречит утверждению, что элементарная формула должна содержать 3 конъюнкта.

Пусть элементарная формула содержит не 3, а 2 конъюнкта: $p_2p_{01} \vee p_3p_{02}$. Тогда

$$p_2p_{01} \vee p_3p_{02} = p_2 \vee p_3 \tag{5}$$

Это равенство возможно, если $p_{02} = \neg p_{01}$. □

Лемма. *Только тождество (3) удаляет лишние конъюнкты.*

Доказательство. Пусть формула содержит 2 элементарных конъюнкта $p_1p_2 \vee p_3p_4$ и второй конъюнкт лишний: $p_1p_2 \vee p_3p_4 = p_1p_2$. Пусть $p_3 = p_4 = 1$. Тогда $p_1p_2 = 1$. Это возможно только если $p_1p_2 = p_3p_4$. Но тогда левая часть содержит не 2, а один конъюнкт.

Пусть формула содержит 3 элементарных конъюнкта $p_1p_2 \vee p_3p_4 \vee p_5p_6$ и третий конъюнкт лишний: $p_1p_2 \vee p_3p_4 \vee p_5p_6 = p_1p_2 \vee p_3p_4$. Пусть $p_5 = p_6 = 1$. Тогда $p_1p_2 \vee p_3p_4 = 1$. Это возможно, если $p_1p_2 = 1$, $p_3p_4 = 1$, $p_1p_2 = p_1p_5$ и $p_3p_4 = \overline{p}_1p_5$, $p_1p_2 = p_1p_6$ и $p_3p_4 = \overline{p}_1p_6$ или $p_1p_2 = p_1p_5$ и $p_3p_4 = \overline{p}_1p_6$. Только последний вариант сохраняет число конъюнктов в левой части тождества.

Пусть формула содержит 4 элементарных конъюнкта $p_1p_2 \vee p_3p_4 \vee p_5p_6 \vee p_7p_8$ и четвёртый конъюнкт лишний: $p_1p_2 \vee p_3p_4 \vee p_5p_6 \vee p_7p_8 = p_1p_2 \vee p_3p_4 \vee p_5p_6$. Пусть $p_7 = p_8 = 1$. Тогда $p_1p_2 \vee p_3p_4 \vee p_5p_6 = 1$. Это возможно, если $p_ip_{i+1} = 1$, $p_ip_{i+1} = p_ip_7$ и $p_jp_{j+1} = \overline{p}_ip_7$, $p_ip_{i+1} = p_ip_8$ и $p_jp_{j+1} = \overline{p}_ip_8$, или $p_ip_{i+1} = p_ip_7$ и $p_jp_{j+1} = \overline{p}_ip_8$, где $i \in \{1,3,5\}$ и $j \in \{1,3,5\}$. Только последний вариант не меняет число конъюнктов:

$$p_0p_1 \vee \overline{p}_0p_2 \vee p_3 \vee p_1p_2 = p_0p_1 \vee \overline{p}_0p_2 \vee p_3$$

где p_0p_1 вместо p_1p_2, $\overline{p}_0p_2$ вместо p_3p_4 и p_3 вместо p_5p_6. переменная p_3 может быть заменён несколькими конъюнктами, т.е. формула может содержать любое число элементарных конъюнктов. □

Далее строятся совершенные, сокращенные и тупиковые ДНФ. Рассматриваются также минимальные и тупиковые ДНФ.

Совершенные ДНФ. Общепринято использовать ДНФ в качестве мнемонических имён функций. Нахождение ДНФ для функции начинается с построения совершенной ДНФ.

Определение. Совершенная ДНФ есть дизъюнкция конъюнктов, каждый из которых содержит n литералов с n переменными.

Существует следующее правило построения совершенной ДНФ для заданной таблицы:
- создается множество строк, содержащих 1 в столбце-функции;
- эта 1 удаляется;
- в каждой строке i-ый столбец-переменная с значением 1 заменяется на p_i;
- в каждой строке i-ый столбец-переменная с значением 0 заменяется на $\overline{p}_i$;
- полученные строки, соединенные связками $\vee$, образуют совершенную ДНФ.

Это правило не применимо для констант по следующей причине.

По определению функций константы не являются функциями. Но общепринято называть константы нульместными функциями. Таблица константы содержит одну строку с единственным столбцом - столбцом-функцией. Константа 0 не содержит столбец-функцию с значением 1, и поэтому правило построения ДНФ не применимо к ней. Это правило применимо к константе 1, но результатом является пустая ДНФ. Общепринято считать, что ДНФ константы 1 (пустая ДНФ) есть 1. Т.е. пустая ДНф имеет значение истина. По аналогии принято считать, что ДНФ константы 0 (несуществующая ДНФ) есть 0. Другими словами, несуществующая ДНФ имеет значение ложь.

Если все значения в столбце-функции равны 1, то ДНФ, как это следует из тождества 2, есть 1. Действительно, в построенной ДНФ два соседних конъюнкта заменяются одним, не содержащим последние литералы. Два соседних из полученных конъюнктов тоже заменяются одним, не содержащим последние литералы. В итоге остаётся пустая ДНФ, т.е. ДНФ 1.

Если все значения в столбце-функции равны 0, то (несуществующая) ДНФ обозначается 0.

В результате любая функция имеет совершенную ДНФ.

Дизъюнкт является частным случаем ДНФ и может быть 0 или 1. Аналогично, конъюнкт может быть 0 или 1. Такие конъюнкты отсутствуют в совершенных ДНФ, как это следует из правила построения ДНФ.

Существует множество равных совершенных ДНФ, так как ДНФ равны, если они отличаются только перестановкой конъюнктов и литералов в этих конъюнктах. Но в качестве мнемонического имени функции должна использоваться только одна из равных ДНФ. Мы выбираем ту ДНФ, у которой конъюнкты и переменные в этих конъюнктах встречаются в алфавитном порядке (в алфавите $p_1, \overline{p}_1, ..., p_n, \overline{p}_n$). Эта ДНФ называется **естественной**. Кроме того, мы заменим в ДНФ переменные p_i на x_i, и это позволит отличать формулы, являющиеся именами функций, от остальных формул. В результате имя функции становится действительно мнемоническим.

Поясним правила построения совершенной ДНФ на примере функции $\dot{f}^3_{189}$ (таблица 1).

Функция $\dot{f}^3_{189}$ Таблица 1

x_1, x_2, x_3	f^3_{189}	x_1, x_2, x_3	f^3_{189}
0 0 0	1	1 0 0	1
0 0 1	0	1 0 1	1
0 1 0	1	1 1 0	0
0 1 1	1	1 1 1	1

Естественная совершенная ДНФ строится из строк таблицы со значением функции 1 в последовательности от последних строк к первым. Значения 1 в i-ом столбце заменяются на p_i, значения 0 заменяются на $\overline{p}_i$. В результате совершенная ДНФ есть

$$p_1p_2p_3 \vee p_1\overline{p}_2p_3 \vee p_1\overline{p}_2\overline{p}_3 \vee \overline{p}_1p_2p_3 \vee \overline{p}_1p_2\overline{p}_3 \vee \overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3$$

2.1. **Сокращённые ДНФ.** Совершенные ДНФ громоздки. Сокращенные ДНФ более компактны. Сокращенные ДНФ не содержат лишних (фиктивных) литералов.

Определение. ДНФ называется сокращённой, если она получена из совершенной ДНФ удалением лишних литералов с помощью тождеств (1) и (2).

Естественная совершенная ДНФ одна, но естественных сокращённых ДНФ несколько. В частности, существуют 2 правила построения сокращённых ДНФ. Эти правила дают разные результаты. Первое правило даёт единственный результат, второе правило может дать несколько результатов.

- Первое правило - использование максимального числа тождеств (2).

Построение сокращенной ДНФ осуществляется в следующей последовательности:

1. Строятся все тождества (2), присутствующие в ДНФ.
2. Все конъюнкты, присутствующие в левых частях тождеств, удаляются из ДНФ.
3. Все конъюнкты в правых частях тождеств добавляются в полученную ДНФ.
4. Строятся все тождества (1) и (2), присутствующие в полученной ДНФ.
5. Все конъюнкты, присутствующие в левых частях тождеств, удаляются из полученной ДНФ.
6. Все конъюнкты в правых частях тождеств добавляются в полученную ДНФ.
7. Шаги 1–6 повторяются до тех пор, пока в результате выполнения этих шагов получается новая ДНФ.
8. Конец. Полученная ДНФ является сокращённой.

Построим сокращённую ДНФ из совершенной ДНФ, полученной в предыдущем примере.

В совершенной ДНФ есть следующие тождества (2):

$$p_1p_2p_3 \vee p_1\overline{p}_2p_3 = p_1p_3$$
$$p_1p_2p_3 \vee \overline{p}_1p_2p_3 = p_2p_3$$
$$p_1\overline{p}_2p_3 \vee p_1\overline{p}_2\overline{p}_3 = p_1\overline{p}_2$$
$$\overline{p}_1p_2p_3 \vee \overline{p}_1p_2\overline{p}_3 = \overline{p}_1p_2$$
$$p_1\overline{p}_2\overline{p}_3 \vee \overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3 = \overline{p}_2\overline{p}_3$$
$$\overline{p}_1p_2\overline{p}_3 \vee \overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3 = \overline{p}_1\overline{p}_3$$

Все конъюнкты совершенной ДНФ удаляются, и конъюнкты p_1p_3, p_2p_3, $p_1\overline{p}_2$, $\overline{p}_1p_2$, $\overline{p}_2\overline{p}_3$, $\overline{p}_1\overline{p}_3$ добавляются. Полученная ДНФ является естественной сокращённой:

$$p_1\overline{p}_2 \vee p_1p_3 \vee \overline{p}_1p_2 \vee \overline{p}_1\overline{p}_3 \vee p_2p_3 \vee \overline{p}_2\overline{p}_3$$

Лишними в совершенной ДНФ оказались переменные, по одной в каждом её конъюнкте.

Второй пример использует совершенную ДНФ

$$p_1p_2p_3 \vee p_1p_2\overline{p}_3 \vee p_1\overline{p}_2p_3 \vee \overline{p}_1p_2p_3$$

Эта ДНФ имеет следующие тождества (2):

$$p_1p_2p_3 \vee p_1p_2\overline{p}_3 = p_1p_2$$

$$p_1p_2p_3 \vee p_1\overline{p}_2p_3 = p_1p_3$$

$$p_1p_2p_3 \vee \overline{p}_1p_2p_3 = p_2p_3$$

Все конъюнкты совершенной ДНФ удаляются, и конъюнкты p_1p_2, p_1p_3, p_2p_3 добавляются:

$$p_1p_2 \vee p_1p_3 \vee p_2p_3$$

Эта ДНФ является сокращённой.

Замечание. С. В. Яблонский назвал это правило построения сокращённых ДНФ упрощением импликантов. Он назвал конъюнкты *импликантами* и удаление лишних литералов *упрощением импликантов*. Он отрицал другие правила построения сокращённых ДНФ.

- Второое правило - использование минимального числа тождеств (2).

Построение сокращённой ДНФ осуществляется в следующей последовательности:

1. Удаляется произвольная пара конъюнктов, присутствующая в левой части тождества (2).
2. Добавляется конъюнкт, присутствующий в правой части этого тождества.
3. Шаги 1 и 2 повторяются до тех пор, пока тождество (2) применимо.
4. Удаляется произвольная пара конъюнктов, присутствующих в левой части тождеств (1).
5. Добавляется конъюнкт, присутствующий в правой части этих тождеств.
6. Шаги 4 и 5 повторяются до тех пор, пока тождество (1) применимо.
7. Шаги 1–6 повторяются до тех пор, пока тождества (1), и (2) применимы.
8. Конец. Полученная ДНФ является сокращённой.

В зависимости от последовательности выбора пар конъюнктов по этому правилу, полученные сокращённые ДНФ могут быть разными.

Применим это правило к первому примеру с совершенной ДНФ

$$p_1p_2p_3 \vee p_1\overline{p}_2p_3 \vee p_1\overline{p}_2\overline{p}_3 \vee \overline{p}_1p_2p_3 \vee \overline{p}_1p_2\overline{p}_3 \vee \overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3$$

Выбрав первую пару конъюнктов, затем третью и последнюю, и потом четвёртую и пятую, получим естественную сокращённую ДНФ

$$p_1p_3 \vee \overline{p}_1p_2 \vee \overline{p}_2\overline{p}_3$$

Эта сокращённая ДНФ излишняя, так как она получается из предыдущей сокращённой ДНФ после удаления в ней лишних конъюнктов.

Второй пример порождает 3 сокращённых ДНФ при изменении последовательности выбора пар конъюнктов:

$$p_1p_2 \vee p_1\overline{p}_2p_3 \vee \overline{p}_1p_2p_3 \text{ (выбор первого и второго конъюнктов)}$$

$$p_1p_3 \vee p_1p_2\overline{p}_3 \vee \overline{p}_1p_2p_3 \text{ (выбор первого и третьего конъюнктов)}$$

$$p_2p_3 \vee p_1p_2\overline{p}_3 \vee p_1\overline{p}_2p_3 \text{ (выбор первого и четвёртого конъюнктов)}$$

Второй пример демонстрирует необходимость обоих правил построения сокращённой ДНФ.

2.2. **Тупиковые ДНФ.** Тупиковые ДНФ осуществляют окончательное сокращение ДНФ, так как они не содержат лишних конъюнктов.

Определение. ДНФ называется тупиковой, если она получена из сокращённой ДНФ удалением лишних конъюнктов с помощью тождества (3).

Существует следующее правило построения тупиковой ДНФ для заданной сокращённой ДНФ.
1. Выбирается очередной конъюнкт.
2. Выбирается очередной литерал конъюнкта.
3. Выбирается следующий конъюнкт, содержащий литерал, отрицательный к литералу первого выбранного конъюнкта.
4. Из обоих выбранных конъюнктов извлекаются все литералы, кроме выше выбранного литерала и его отрицания.
5. Если извлечённые литералы образуют конъюнкт и если этот конъюнкт существует в ДНФ, то этот конъюнкт удаляется из ДНФ.
6. Шаги 1–5 повторяются до исчерпания всех конъюнктов ДНФ.
7. Конец. Построенная ДНФ является тупиковой.

Если поменять последовательность конъюнктов в сокращённой ДНФ, то можно получить новую тупиковую ДНФ. Это основная сложность построения тупиковых ДНФ, так как число перестановок конъюнктов очень велико.

Следующее правило тоже строит все тупиковые ДНФ, но без перестановки конъюнктов.
1. Выбирается очередной конъюнкт в естественной сокращённой ДНФ.
2. Ищутся пары конъюнктов, поглощающих выбранный конъюнкт. Поиск осуществляется одним просмотром ДНФ. При просмотре отбираются конъюнкты, содержащие часть литералов выбранного конъюнкта и содержащие остальные литералы, не имеющие переменные из выбранного конънкта. В отобранных конъюнктах ищутся пары, у которых эти части не пересекаются и содержат все литералы выбранного конъюнкта.
3. Если такие пары найдены, то составляются тройки, содержащие порядковые номера выбранного конъюнкта и этой пары в ДНФ.
4. Шаги 1–3 повторяются до исчерпания конъюнктов в ДНФ
5. Выбирается очередная построенная тройка.
6. Строится множество, которое содержит выбранную тройку и содержит последующие тройки, такие что все элементы этого множества имеют первые компоненты, отсутсвующие в остальных компонентах всех троек множества.
7. Пусть построенное множество троек не является подмножеством построенных ранее множеств. Тогда из естественной ДНФ удаляются конъюнкты, номера которых есть первые компоненты троек этого множества. Построенная ДНФ является тупиковой.

8. Шаги 5–7 повторяются до исчерпания всех троек.
9. Конец. Построены все тупиковые ДНФ.

Изменение последовательности конъюнктов в естественной сокращённой ДНФ не порождает новые тупиковые ДНФ.

Построим тупиковые ДНФ для первого из предыдущих примеров. Этот пример содержит сокращённую ДНФ

$$p_1\overline{p}_2 \vee p_1p_3 \vee \overline{p}_1p_2 \vee \overline{p}_1\overline{p}_3 \vee p_2p_3 \vee \overline{p}_2\overline{p}_3 \tag{4}$$

Первый конъюнкт поглощается вторым и шестым конъюнктами. Второй конъюнкт поглощается первым и пятым конъюнктами. Третий конъюнкт поглощается четвёртым и пятым конъюнктами. Четвёртый конъюнкт порождается третьим и шестым конъюнктами. Пятый конъюнкт порождается вторым и третьим конъюнктами. Шестой конъюнкт порождается первым и четвёртым конъюнктами.

В результате образуется 6 троек

$$(1,2,6),\ (2,1,5)\,(3,4,5),\ (4,3,6),\ (5,2,3),\ (6,1,4)$$

а также 8 множеств троек и тупиковых ДНФ:

$$\{(1,2,6),\ (3,4,5)\} \to p_1p_3 \vee \overline{p}_1\overline{p}_3 \vee p_2p_3 \vee \overline{p}_2\overline{p}_3$$
$$\{(1,2,6),\ (4,3,6),\ (5,2,3)\} \to p_1p_3 \vee \overline{p}_1p_2 \vee \overline{p}_2\overline{p}_3$$
$$\{(1,2,6),\ (6,1,4)\} \to p_1p_3 \vee \overline{p}_1p_2 \vee \overline{p}_1\overline{p}_3 \vee p_2p_3$$
$$\{(2,1,5),\ (3,4,5),\ (6,1,4)\} \to p_1\overline{p}_2 \vee \overline{p}_1\overline{p}_3 \vee p_2p_3$$
$$\{(2,1,5),\ (4,3,6)\} \to p_1\overline{p}_2 \vee \overline{p}_1p_2 \vee p_2p_3 \vee \overline{p}_2\overline{p}_3$$
$$\{(2,1,5),\ (4,3,6)\} \to p_1\overline{p}_2 \vee \overline{p}_1p_2 \vee \overline{p}_1\overline{p}_3 \vee p_2p_3$$
$$\{3,4,5),\ (6,1,4)\} \to p_1\overline{p}_2 \vee p_1p_3 \vee \overline{p}_1\overline{p}_3 \vee p_2p_3$$
$$\{(5,2,3),(6,1,4)\} \to p_1\overline{p}_2 \vee p_1p_3 \vee \overline{p}_1p_2 \vee \overline{p}_1\overline{p}_3$$

Во втором из предыдущих примеров все сокращённые ДНФ являются тупиковыми.

2.3. **Минимальные и кратчайшие ДНФ.** Число тупиковых ДНФ очень велико при больших n. По одной из оценок, это число равно 2^{2n}. При $n = 15$число тупиковых ДНФ равно миллиарду.

В математической кибернетике используются только минимальные и кратчайшие из тупиковых ДНФ. Их число значительно меньше.

Определение. Тупиковая ДНФ называется минимальной, если она имеет минимальную сложность (сложность измеряется числом литералов и отрицаний в литералах). Тупиковая ДНФ называется кратчайшей, если она содержит минимальное число конъюнктов.

Кратчайшие и минимальные ДНФ могут содержаться одно в другом или пересекаться, но чаще всего они равны.

Из восьми тупиковых ДНФ, построенных в предыдущем подразделе для первого примера, только две являются минимальными:

$$p_1p_3 \vee \overline{p}_1p_2 \vee \overline{p}_2\overline{p}_3$$
$$p_1\overline{p}_2 \vee \overline{p}_1\overline{p}_3 \vee p_2p_3$$

Обе эти ДНФ являются кратчайшими.

Для построения электронной схемы реализации функций используется только одна из минимальных ДНФ, например с меньшим лексиграфическим порядком. Это вторая из этих ДНФ, так как $p_1\overline{p}_2$ имеет меньший порядок по сравнению с p_1p_3.

Для второго примера только одна из четырёх тупиковых ДНФ является минимальной:

$$p_1p_2 \vee p_1p_3 \vee p_2p_3$$

Эта ДНФ является кратчайшей тоже.

Для построения минимальных ДНФ не надо строить все тупиковые ДНФ и потом излекать максимальные. Но первые 5 шагов правила построения тупиковых ДНФ выполняются без изменения. Упрощается шаг 6 построения множеств троек. Это построение прекращается тогда, когда сложность множества становится больше минимальной для данного шага. Но последний, седьмой, шаг практически пустой. На этом шаге построенное множество троек проверяется не быть подмножеством одного из построенных ранее множеств троек. Число этих множеств очень велико, так как каждое множество троек порождает одну тупиковую ДНФ. Поэтому проверка не быть подмножеством требует просмотра в среднем половины построенных множеств троек. Если ограничиться миниальными ДНФ, то этот просмотр почти отсутствует, так как число минимальных множеств троек очень мало по сравнению с числом всех множеств троек при больших n.